Matrices au lycée : de nouvelles possibilités, pour la transition secondaire-supérieur?

Anne Balliot, Ghislaine Gueudet

MATRICES AU LYCEE: DE NOUVELLES POSSIBILITES, POUR LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR ?

Anne Balliot, Lycée VHB Rennes, IREM de Rennes

Ghislaine Gueudet, IUFM Bretagne UBO, IREM de Rennes

Résumé.

Cet atelier concerne l'enseignement des matrices, prévu par le nouveau programme de TS spécialité, et ses apports possibles au niveau post-bac. Nous nous sommes basées sur les textes officiels, sur des manuels scolaires, et sur un enseignement réalisé en 2012-2013. Le programme concernant cet enseignement souligne la nécessité de proposer la résolution de problèmes, dans lesquels les matrices apparaissent comme outils, et d'utiliser divers logiciels. Il laisse beaucoup de liberté, concernant les contenus mathématiques. Ceci pose question aux professeurs. Une grande importance est accordée au contexte des probabilités, alors que la géométrie joue un rôle moindre. Nous posons la question de l'appui possible sur cet enseignement en post-bac, en particulier pour l'enseignement de l'algèbre linéaire. Nous examinons en détails l'exemple du thème “pertinence d'une page web”.

Cet atelier concerne l'enseignement des matrices, prévu par le nouveau programme de TS spécialité, et ses apports possibles au niveau post-bac. Ce que nous présentons peut être considéré comme une première réflexion sur ce thème, qui demande à être suivie de recherches plus approfondies. Nous nous sommes basées sur les textes officiels : programme paru au Bulletin Officiel (B.O. 2011), document ressource “Matrices” ; sur des manuels scolaires (Math'x 2012, Transmath 2012, Odyssée 2012 en particulier), et sur un enseignement réalisé en 2012-2013 par l'une des auteures de cet article.

1. PRESENTATION DU PROGRAMME, ORIENTEE PAR DES QUESTIONS

Nous remarquons d'emblée que le programme ne fixe pas d'objectif très clair, en termes de contenus théoriques qui pourront être exigibles des élèves. En cette première année de mise en place de cet enseignement, alors qu'aucun sujet de Baccalauréat n'est disponible, ceci peut être déstabilisant pour les enseignants et les élèves. Ce manque de repères clairs peut poser problème en particulier pour les élèves moins à l'aise. Pour le détail des contenus, nous renvoyons le lecteur aux textes officiels.

Nous retenons ici qu'il s'agit de proposer un enseignement basé sur la résolution de problèmes, dans lequel les matrices, et les opérations sur les matrices apparaissent comme des outils. Cet enseignement doit mobiliser un certain nombre de logiciels : logiciels de calcul formel, GeoGebra, tableur, et la calculatrice.

La plupart des manuels choisissent d'introduire les matrices avec des problèmes de coût, ou de graphes probabilistes. Dans ces problèmes, les matrices apparaissent comme des tableaux de nombres, des représentations économiques en temps pour effectuer certains calculs. Les puissances d' une matrice, le produit d'une matrice par un vecteur, apparaissent assez naturellement dans ces contextes ; ce qui permet d'introduire en cours la formule du produit, comme un prolongement “naturel” de ces cas particuliers. Les suites de matrices sont aussi introduites, et leur étude amène à un calcul de puissances, qui sert de support à l'introduction de la diagonalisation. Certains manuels introduisent les notions de valeur propre et vecteur propre.

Plusieurs points nous semblent intéressants à souligner, à ce propos.

Matrices et nombres réels : analogies, différences, et conséquences

D'abord l'introduction des matrices comme tableaux de nombres amène des questions portant sur les conséquences du jeu possible sur les analogies et différences entre matrices et nombres réels.

A propos des propriétés du produit, la matrice nulle O, et la matrice identité I sont associées par analogie avec les nombres 0 et 1. Ceci n'est pas sans soulever des difficultés, puisque les élèves peuvent se tromper sur la taille de la matrice O ; quant à la matrice I, ils peuvent croire qu'elle n'est composée que de 1. De plus les confusions matrice-réel sont fréquentes, dans les copies des élèves : il n'est pas rare de voir écrit, par exemple A-I = I*(A-1), ou des opérations comme celle qui apparaît ci-dessous (figure 1).

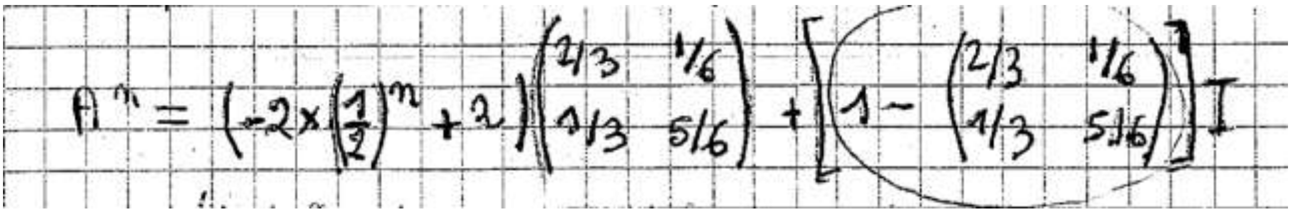


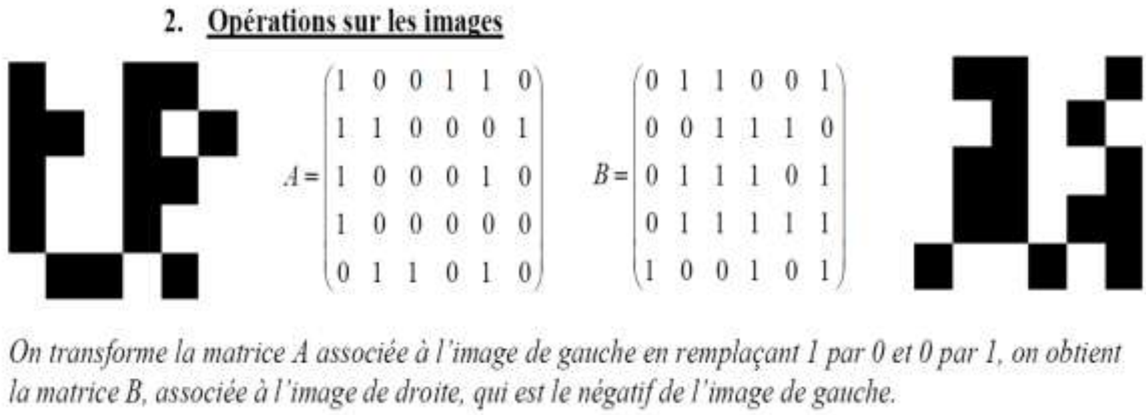
Figure 1 : Opérations avec des nombres réels et des matrices 2x2, des confusions !

Souligner les différences entre produit de matrices et produit de nombres réels offre toutefois des pistes intéressantes : le produit n'est pas commutatif, certaines matrices non nulles n'ont pas d'inverse. Ces constats permettent de mettre en évidence l'idée de loi de composition, et le fait que de telles lois peuvent avoir différentes propriétés.

A propos des suites, la limite d'une suite de matrice est une notion qui semble naturelle aux élèves, en prolongement de ce qu'ils savent sur les suites de réels. Il s'agit ensuite de bien souligner que l'analogie reste limitée : on ne peut pas parler de suite croissante de matrices !

Beaucoup de visualisation, et peu de géométrie

Le document ressources “Matrices” (MEN, 2012) propose de nombreux thèmes et problèmes exploitant l'idée d'image numérique, ou les possibilités de visualisation offertes par certains logiciels. Ainsi, une image numérique formée de pixels blancs ou noirs est associée à une matrice de 0 et de 1 (figure 2) ; l'objet matrice prend alors un autre sens, comme forme de représentation, sur laquelle on va opérer des échanges, entre 0 et 1 pour obtenir le négatif d'une certaine image en noir et blanc, par exemple.


2. Opérations sur les images

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1&0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&0\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1\\1&0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

On transforme la matrice A associée à l'image de gauche en remplaçant 1 par 0 et 0 par 1, on obtient la matrice B, associée à l'image de droite, qui est le négatif de l'image de gauche.

Figure 2. Matrices et images numériques, extrait du document ressource “matrices”.

La construction de la Fougère de Barnsley, utilisant un logiciel de calcul formel, dans lequel quatre matrices agissent de manière aléatoire sur des points, est un autre exemple de visualisation susceptible de motiver les élèves. Cependant, il amène un travail qui relève essentiellement de la programmation informatique, et non de la géométrie.

Il est cependant question de géométrie, dans le document ressources comme dans certains manuels. Des problèmes abordent la notion de rotation, de symétrie, et les matrices associées. Certains manuels (Transmath 2012) font calculer aux élèves les coordonnées de l'image d'un point, par exemple par une rotation d'angle □, et en déduisent que l'on peut représenter cette transformation par l'action d'une matrice. Cette méthode est proche de ce qui pourrait être fait à l'université – notons que l'on attend le plus souvent à l'université, pour parler de rotation, d'avoir introduit les espaces euclidiens, ce qui est généralement pratiqué en deuxième année. Dans d'autres manuels en revanche (Math'x 2012), on observe l'effet d'applications géométriques sur des images, en utilisant GeoGebra. Le logiciel agit comme “boîte noire” : une matrice est entrée, et on observe comment elle agit sur des points. Ainsi le lien entre matrice et transformation géométrique est fait à l'inverse de la méthode précédente : on fait agir une matrice, par le biais du logiciel, et on observe que son action est la même que celle d'une rotation. En conséquence, on admet que la matrice en question “représente” une rotation.

Ceci pourrait être un premier pas vers des usages géométriques des matrices, susceptibles de faire un lien avec l'algèbre linéaire. Toutefois, l'obstacle du passage d'applications agissant sur des points, à des transformations qui opèrent sur des vecteurs, est bien connu (Gueudet, 2004).

Quelle évaluation, pour cet enseignement ?

La mise en place d'un enseignement fondé sur la résolution de problèmes soulève immédiatement la question de l'évaluation qui peut suivre. Ici, plusieurs aspects interrogent : sera-t-il possible de pratiquer la résolution de problèmes, l'emploi de logiciels, dans l'évaluation qui sera faite au baccalauréat ? Quelles connaissances, savoir-faire seront requis des élèves, pour un enseignement ne fixant pas clairement de connaissances théoriques exigibles ? Le sujet de baccalauréat de Pondichéry (le seul dont nous disposions au moment de l'atelier, et qui a été présenté aux participants), ne semble pas aller dans le sens de la résolution de problèmes.

2. PRESENTATION DE LA PROGRESSION SUIVIE EN 2012-2013 DANS UNE CLASSE DE TS SPECIALITE

Le programme sur les notions de matrices a été découpé en trois parties intercalées par de l'arithmétique. Cela a permis aux élèves de revenir sur des notions (en particulier en arithmétique) et à l'enseignante de s'approprier le nouveau programme. Le volume horaire consacré à l'enseignement des matrices a été d'environ 26 h (pour 30 h d'arithmétique).

Le premier chapitre, (12h) en novembre, avait comme objectif d'introduire les matrices, avec la notion de graphe et de suite de matrices, les calculs (somme, produit, puissance) et de travailler sur des marches aléatoires. On a étudié par exemple le problème du collectionneur et le modèle d'Erhenfest à 2 boules (problèmes extraits de Math'x) avec utilisation de logiciels pour visualiser et simuler.

Le deuxième chapitre (6h en février) a traité de l'inverse de matrice, déterminant, systèmes et applications sur des exemples de la diagonalisation. Exemples de problèmes traités : matrice et rotation (extrait de Transmath) , chiffrement de Hill (qui permet de réinvestir des notions apprises en arithmétique, extrait de Math'x, partie arithmétique).

Le dernier chapitre (8h en mai) a concerné les suites de matrices du type $U_{n+1}=AU_n+B$, de la convergence des suites de matrices et du comportement asymptotique d'une marche aléatoire. Un exemple de problème étudié est celui de la pertinence d'une page web, activité proposée dans cet atelier.

Une autre approche (d'une collègue) serait à partir d'un premier problème, “le funambule”, de rencontrer une grande partie des notions à appréhender, peut-être est-ce davantage dans l'esprit du programme.

Les évaluations données sur ces chapitres ont été bien réussies.

Commentaires et discussions au cours de l'atelier, sur le programme

Quelques éclaircissements ont été apportés, sur les intentions des concepteurs du programme (de notre point de vue, il serait utile à tous les professeurs de connaître ces intentions !)

Il semblerait qu'il n'y ait pas d'objectif imposé, en termes de contenu théorique exigible des élèves, à la suite de cet enseignement. En particulier, celui-ci ne devrait pas donner lieu à une évaluation de type “restitution organisée de connaissances”. La liberté, laissée à l'enseignant (programme très bref, mentionnant des “exemples de problèmes”), est un choix délibéré. Les concepteurs de programmes souhaiteraient que le document ressource, très riche, soit encore complété par d'autres exemples de problèmes.

L'une des intentions du programme est de proposer une première initiation à l'algèbre linéaire. Ce point a fait débat : est-ce que les choix faits permettent réellement une telle initiation, alors même que les matrices sont présentées comme des tableaux de nombres, et qu'il ne peut pas être question d'espace vectoriel. Un autre changement majeur dans le nouveau programme est la réduction de la place accordée à la géométrie. Or celle-ci fournit également un mode d'approche de l'algèbre linéaire...

Autre point délicat : l'évaluation. Les concepteurs du programme souhaitaient que soit associée à cet enseignement une évaluation spécifique, sous forme de Travaux Pratiques. Ceci n'a pas été possible à organiser, dans les conditions actuelles.

Une nécessité de formation spécifique des professeurs est soulignée !

3. FOCUS SUR UN THEME : “PERTINENCE D'UNE PAGE WEB”

Nous avons testé en classe une activité portant que le thème “pertinence d'une page web”, thème qui figure parmi les exemples donnés dans le document ressources “matrices” (texte de l'activité en annexe). Pour cette activité, l'enseignante s'est inspirée des manuels Math'x et Odyssée, tout en effectuant des modifications destinées en particulier à limiter à 1h30 le temps consacré à ce travail.

A propos du thème “pertinence d'une page web”, nous notons que celui-ci soulève d'emblée des questions de définition. Qu'est-ce que la pertinence ? Il faut supposer au préalable qu'une recherche par mots-clés a été faite, souligner qu'on est obligé de présenter les pages obtenues dans un certain ordre, et qu'il faut donc faire un choix, pour cet ordre. Il peut d'ailleurs être intéressant de faire effectuer aux élèves une telle recherche, pour rendre plus concrète la question posée. Nous n'avons pas fait ce choix ici, par manque de temps, et il a sans doute manqué aux élèves. Le document ressource introduit très soigneusement la notion de pertinence, en faisant compter les liens entrants sur une page, puis en justifiant pourquoi le seul décompte des liens entrants n'est pas un bon modèle de pertinence. Il introduit plusieurs modèles possibles, et montre finalement comment on en arrive à l'idée d'un “surfeur aléatoire”.

Selon les manuels, la réflexion sur la notion même de pertinence est plus ou moins approfondie, avant l'introduction du modèle du “surfeur aléatoire”. Un Internaute se déplace sur un certain ensemble de pages, associées par des liens. L'indice de pertinence d'une page est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité que le surfeur soit sur cette page après n clics. Deux types de “surf” sont envisagés, dans le document ressource et dans les manuels : le surf “sans saut” (déplacement en suivant les lignes, considérés comme équiprobables) et déplacement “avec saut” (associant le déplacement selon les liens et le choix aléatoire d'une page donnée).

Pour cette activité, nous avons choisi un intitulé : “procédé de classement” qui ne fait pas référence à la notion de pertinence qui nous semblait ambigüe. Nous avons également choisi d'introduire directement le modèle du surfeur “avec saut”, ce qui était sans doute rapide, pour les élèves. Le travail de modélisation, avec un arbre, et la recherche de deux matrices a dû être guidé. En revanche, le calcul des probabilités de fréquentation, avec la calculatrice n'a pas posé de problème aux élèves ; et le fait de constater que, quelque soit l'état initial, on convergeait toujours vers la même probabilité limite a retenu leur attention.

Commentaires et discussions au cours de l'atelier, sur l'activité et le thème “pertinence d'une page web”

Dans cette activité, les élèves sont amenés à manipuler des matrices lignes. Dans le programme, on travaille essentiellement sur des matrices colonnes, mais les matrices ligne sont aussi abordées, dans le cas des marches aléatoires. Ceci a donné lieu à des discussions, sur la pertinence de ce choix : ne vaut-il pas mieux s'en tenir aux colonnes, notamment dans un objectif de préparation à l'enseignement supérieur ? Les spécialistes de probabilités connaissent le lien entre Chaîne de Markov et matrice ligne (matrice d'une forme linéaire), mais ceci n'est pas évident, pour des professeurs non spécialistes ; et le document ressource ne donne pas d'éclairage sur ce point.

A propos du texte même de l'activité qui a été testée en classe, il semble moins guidé que les propositions faites dans les manuels. Notamment, le fait de leur proposer d'observer ce qui se passe pour plusieurs états initiaux peut susciter un vrai questionnement. Cependant, des évolutions du texte actuel (suppression de certaines questions intermédiaires) pourraient enrichir la recherche menée par les élèves.

Qu'est-ce que les élèves apprennent, à propos des matrices, dans cette activité ? Ils doivent d'abord modéliser, et donc effectuer une représentation sous forme d'arbre, puis passer aux matrices. Ceci leur permet ensuite de traiter le problème.

4. RETOUR SUR LES APPORTS POSSIBLES, POUR LE POST-BAC.

Seuls certains élèves suivent la spécialité mathématique. Il n'est donc pas possible, au niveau post-bac, de s'appuyer sur ces contenus comme si ils étaient connus des étudiants.

L'apport post-bac est donc plutôt à considérer en terme d'appui sur les principes retenus pour ce programme :

- résolution de problèmes ;
- emploi des TICE ;
- travail associant algèbre linéaire et probabilités.

La question se pose différemment selon les filières : CPGE, IUT, Université. Dans le cas de la première année d'université, on peut imaginer proposer des travaux de groupe, de type exposé, à propos de thèmes extraits du programme de spécialité TS.

Est-il possible d'expérimenter un tel dispositif, dans les conditions actuelles de l'enseignement universitaire ?

Compléments issus des discussions lors de l'atelier

Le nouveau programme des DUT informatique prévoit un enseignement de modélisation mathématique, dont le contenu est libre. Ceci peut offrir un espace propice pour ce type de travail.

Approfondir ces questions demanderait un réel travail, au sein de groupes de type IREM.

REFERENCES

B.O. (2011). *Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011*. Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques.

Gueudet, G. (2004). Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24/1, 81-114, la Pensée Sauvage, Grenoble.

MEN/DEGESCO (2012). *Ressources pour la classe Terminale générale et technologique. Matrices.* http://eduscol.education.fr/cid45766/mathematiques-pour-le-college-et-le-lycee.html

Math'x : Le Yaouanq, M.-H. (dir.) (2012). *Collection Math'x. Enseignement de spécialité* Term. S. Paris: Didier.

Odyssée : Sigward, E. et al. (2012). *Odyssée Maths Terminale S éd. 2012 - Livre de l'élève, enseignement de spécialité*. Paris : Hatier.

Transmath : Bénizeau, P., Barros, J.-M., Morin, J. (dir.) (2012). *Transmath. Enseignement de spécialité Term. S.* Paris : Nathan.

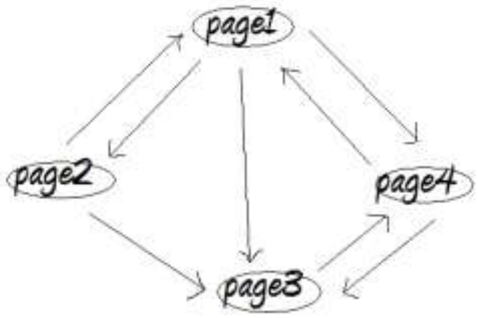
ANNEXE

TS1/2/3 Spe Math 2013 **Classement de pages web par un moteur de recherche**

Références : Document d'accompagnement+manuels Odyssée+Math'x

---

Le graphe ci-dessous représente les liens existant entre quatre pages web numérotées de 1 à 4. Un internaute surfe sur ces pages, et on s'intéresse à la probabilité qu'il soit sur une page donnée après *n* clics.



Cet internaute surfe de manière aléatoire de la façon suivante :

Il utilise deux onglets F et G : Dans 75% des cas, il est sur l'onglet F ; sur cet onglet il suit, de façon équirépartie, les liens proposés par le graphe. Dans 25% des cas il est sur l'onglet G ; sur cet onglet il choisit au hasard de façon équirépartie une page quelconque y compris la page en cours.

<u>1) Modélisation du phénomène d'évolution</u>

a) Pondérer le graphe donné, correspondant donc aux déplacements du surfeur sur l'onglet F, et donner la matrice de transition *T* associée.

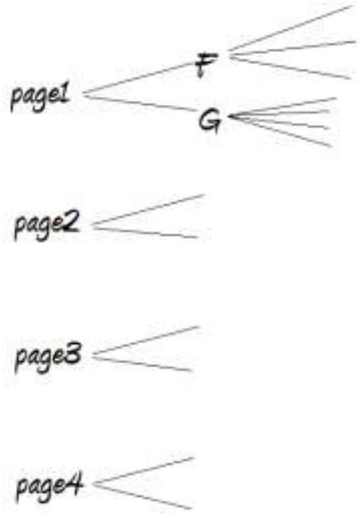
b) Pour *n* entier positif, on note X_n la matrice ligne donnant la répartition des probabilités de fréquentation des quatre pages après *n* clics.

Montrons que le processus d'évolution peut se modéliser par cette suite (X_n) qui vérifie la relation $X_{n+1} = X_n \times A + B$, les matrices *A* et *B* étant à déterminer.

Notons Y_n la variable aléatoire qui représente la page sur laquelle on se trouve après *n* clics.

On a alors $X_n = \big(P(Y_n = 1)\;\; P(Y_n = 2)\;\; P(Y_n = 3)\;\; P(Y_n = 4)\big)$

Compléter l'arbre ci-contre pour exprimer $P(Y_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(Y_n = k)$ pour *k* allant de 1 à 4.

	[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Conclure.

2) Convergence

a) On pose $X_0 = (1\ 0\ 0\ 0)$. Déterminer X_1, X_5, X_{10} et X_{20} à l'aide de la calculatrice. Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite (X_n) ?

b) Que se passe-t-il avec une autre répartition initiale ?

c) On suppose maintenant que quelle que soit la page de départ, la suite des matrices lignes (X_n) converge vers une matrice ligne X (état stable du système) vérifiant $X = XA+B$.

A quelle condition peut-on trouver X de manière unique ?

Déterminer X puis comparer avec vos conjectures précédentes.

Si on effectue sur un moteur de recherche une recherche par mots-clés, ce moteur va trouver un ensemble de pages correspondant à ces mots-clés. Etant donné le grand nombre possible de ces pages, il faut les fournir dans un certain ordre.

On peut chercher à associer à chaque page un nombre, sa pertinence, qui permettra ensuite le classement.

Une manière de calculer la pertinence d'une page est de considérer qu'elle correspond à la probabilité de visite de cette page par un surfeur comme celui que nous avons étudié ici.

Dans notre exemple, l'état stable trouvé nous donne alors la pertinence de chaque page. En pratique la recherche de l'état stable ne se fait pas par la résolution de l'équation matricielle (les dimensions sont trop importantes rendent les calculs trop longs). On approche l'état stable très rapidement comme dans 2a).

Cet algorithme est adapté de l'algorithme de PageRank(PR), inventé par Larry Page, cofondateur de Google. (Lire point info p173 de votre manuel.)